

Séminaire de théorie des catégories

Rémy CERDA, Meven BERTRAND
ENS de Lyon

Premier semestre 2018–2019

Présentation

Les catégories sont, à notre sens, un élément très important des mathématiques et de l'informatique moderne. Elles sont d'un grand secours dans la formalisation d'un certain nombre d'idées fondamentales : foncteurs, transformations naturelles ou propriétés universelles se retrouvent partout, de la géométrie algébrique à la théorie des automates en passant par la logique. Nous voulons donc organiser un séminaire pour familiariser les étudiant·es des départements d'informatique et de mathématiques avec ce domaine.

Le séminaire n'a aucun pré-requis, si ce n'est une familiarité avec les objets des mathématiques et/ou de l'informatique, qui serviront d'exemple tout au long du séminaire. Il est ouvert aux étudiant·es dès la L3, mais peut surtout être très profitable aux M1 et M2 qui seraient encore novices en catégories.

Le séminaire se découpera en deux parties : la première moitié du semestre restera assez abordable, et aura pour but d'introduire et d'illustrer les objets basiques de la théorie des catégories. La seconde moitié, elle, sera plus ambitieuse, en faisant intervenir des objets plus compliqués et des ouvertures sur des domaines divers.

Programme

Première partie, avant les vacances de la Toussaint :

1. Catégories
2. Premières propriétés universelles : (co)produit, objets initiaux et finaux...
3. Diagrammes et limites
4. Foncteurs, naturalité
5. Un exemple d'application : les coalgèbres

Pause de mi-semestre : vacances de la Toussaint, partiels.

Seconde partie, à partir de la mi-novembre :

6. Exponentielles et lemme de YONEDA
7. Applications du lemme de YONEDA
8. Adjoints, monades
9. Application des adjoints et des monades

Ce programme, indicatif, est bien sûr sujet à évolution en fonction des retours des étudiant·es et de la vitesse d'avancement.

S'il devait rester un peu de temps, ou en vue d'éventuels exposés, les thèmes suivants pourraient également être abordés :

- ▷ topoi et logique,

- ▷ théorie catégorielle des types,
- ▷ théorie homotopique des types,
- ▷ approfondissements autour des coalgèbres.

Références

Notre principale source est Steve AWODEY, *Category Theory*, Oxford : Clarendon Press, 2006. Pour les compléments, on utilisera à l'occasion :

- ▷ Saunders MACLANE, *Categories For The Working Mathematician*, 2^e éd., Springer New York, 1978;
- ▷ Bart JACOBS, *Introduction to Coalgebra, Towards Mathematics of States and Observation*, Cambridge University Press, 2016;
- ▷ Saunders MACLANE et Ieke MOERDIJK, *Sheaves in Geometry and Logic : A First Introduction to Topos Theory*, Springer New York, 1994;
- ▷ The UNIVALENT FOUNDATIONS PROGRAM, *Homotopy Type Theory : Univalent Foundations of Mathematics*, Institute for Advanced Study : <https://homotopytypetheory.org/book>, 2013.

Organisation pratique

Volume horaire

Deux heures par semaine, avec une pause au moment des partiels de mi-semester.

L'horaire est à définir pour réussir à toucher les informaticien·nes et mathématicien·nes de toutes les promotions. Le jeudi après-midi est idéal, à ce titre; on pourrait aussi envisager d'autre créneaux, idéalement en début d'après-midi.

Salle

Une salle de TD du 4^e étage serait appropriée.

Encadrement

Nous pensons pouvoir assurer l'encadrement des premières séances.

Pour la deuxième partie du semestre au moins, nous aimerions être suivis par un EC qui, sans être nécessairement présent aux séances, pourrait répondre à nos questions en amont (préparation des séances) et en aval (interrogations des étudiant·es auxquelles nous n'aurions pas su répondre).

Validation

L'idéal serait, si c'était possible, de pouvoir valider ce séminaire dans le cadre du diplôme de l'ENS.

La validation du cours s'appuierait alors sur deux points :

- ▷ présence aux séances;
- ▷ réalisation d'un petit exposé sur un sujet au choix, avec l'aide des animateurs du séminaire.